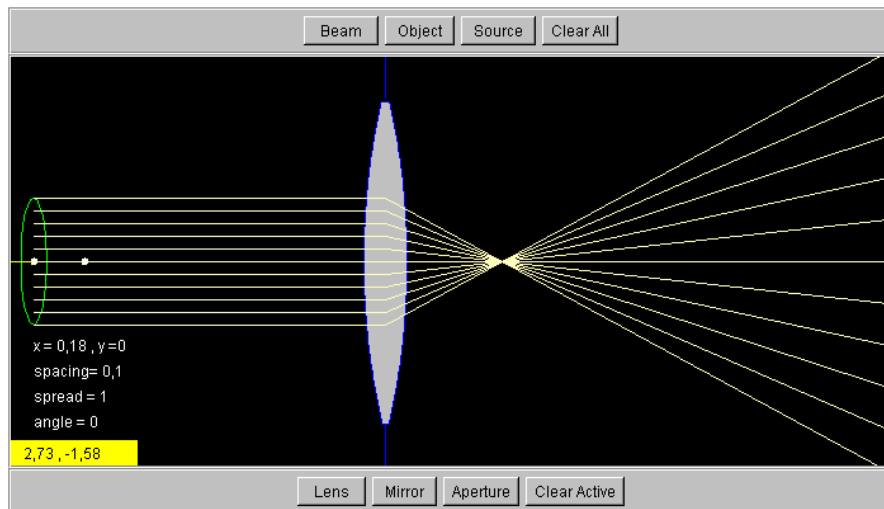


# Aufgabensammlung mit Lösungen zum Applet „optische Bank“ (LMZ, Bereich Medienbildung, OStR Gröber)



<http://webphysics.davidson.edu/Applets/optics4/default.html>

## I. Aufgaben für Mittelstufe

### 1. Abbilden mit einer Sammellinse

Mit Linsen können ebene Abbilder von Gegenständen gemacht werden. Linsen werden z. B. in Kameras eingesetzt oder sind Bestandteil unseres Auges. Doch wie erzeugt eine Linse auf einem Film oder auf der Netzhaut ein Bild?

Zur Untersuchung des Abbildungsvorgangs betrachten wir den abzubildenden Gegenstand als Streuobjekt. Von jedem Gegenstandspunkt seiner Oberfläche wird Licht in alle Raumrichtungen ausgesendet. Wir picken einen dieser Punkte heraus und untersuchen wie dieser Gegenstandspunkt zur Abbildung beiträgt:

- Erzeuge einen Gegenstandspunkt (Source) bei  $x = 0,5$  auf der optischen Achse (gelbe Linie) und positioniere dann eine Linse bei  $x = 3,5$ :
  - In welcher Weise wird der Lichtverlauf von der Linse beeinflusst?
  - Welcher Anteil des vom Gegenstandspunkt ausgehenden Lichts wird zur Abbildung verwendet?
- In Ausbreitungsrichtung des Lichts zusammenlaufende Lichtbündel heißen konvergent, in Ausbreitungsrichtung auseinanderlaufende divergent und ansonsten heißt ein Lichtbündel parallel:
  - Grenze das vom Gegenstandspunkt ausgehende Strahlenbündel auf drei von der Linse erfasste Strahlen ein und beschreibe die Ausbreitung des Lichts mit obigen Begriffen.
  - An welchem Ort in der Simulation entsteht das Bild des Gegenstandspunktes, der Bildpunkt?
- Die Ebene senkrecht zur optischen Achse durch die Linsenmitte heißt Mittelebene, eine Ebene senkrecht zur optischen Achse mit Gegenstandspunkten heißt Gegenstandsebene, eine weitere Ebene heißt Bildebene:

- Untersuche, wohin die einzelnen Punkte der Gegenstandsebene abgebildet werden und formuliere ein Ergebnis.
- d) Bei einem vergrößerten Bild liegen die den Gegenstandspunkten zugeordneten Bildpunkte weiter als die Gegenstandspunkte von der optischen Achse entfernt. Den Abstand zwischen Gegenstandsebene und Mittelebene nennt man Gegenstandsweite, den zwischen Mittelebene und Bildebene Bildweite:
- Wähle als Lichtquelle „Objekt“. Für welche Abstände von der Linsenmitte entsteht ein verkleinertes, ein vergrößertes oder gar kein Bild mehr?
- e) Außer vergrößerten und verkleinerten Bildern unterscheidet man im Vergleich zum abgebildeten Gegenstand zwischen seitenverkehrten, auf dem Kopf stehende reelle (es gibt Bildpunkte) und virtuelle Bilder (es gibt keine Bildpunkte):
- Wähle als Lichtquelle „Objekt“: Erzeuge ein reelles, seitenverkehrtes, vergrößertes und auf dem Kopf stehendes Bild. ann gleich großes und schließlich verkleinertes Bild
  - Erzeuge ein virtuelles Bild
  - Gibt es auf dem Kopf stehende und nicht seitenverkehrte reelle Bilder?
- f) Der Abstand zwischen Gegenstandsebene und Mittelebene heißt Gegenstandsweite, der zwischen Mittelebene und Bildebene Bildweite:
- Wie verändern sich die Bildweite und Bildgröße bei Verkleinerung der Gegenstandsweite?
  - Zwischen welchen Werten kann bei reellen Abbildungen die Gegenstandsweite, zwischen welchen die Bildweite liegen?

## 2. Brennweite und Brechkraft

- a) Wähle als Lichtquelle „Objekt“ und bilde es mit einer Sammellinse ab. Beschreibe jeweils was passiert, wenn du
- die Linse anklickst und mit der Maus die beiden Punkte rechts und links der Linse verschiebst.
  - einen der beiden Punkte auf die andere Linsenseite verschiebst und seinen Abstand von der Linse veränderst.
- b) Die in a) verschobenen Punkte heißen Brennpunkte. Ihr Abstand zur Linsenmitte heißt Brennweite. Die Brennweite einer Linse gibt an wie stark eine Linse das Licht bündelt (Sammellinse) oder zerstreut (Zerstreuungslinse).
- Untersuche den Zusammenhang zwischen Linsenkrümmung und Brennweite. Welche Krümmung und Brennweite hat eine Linse, die Licht nicht ablenkt?
  - Bei Brillengläsern wird nicht die Brennweite der Linsen, sondern ihre Brechkraft in Dioptrin angegeben: Worin unterscheidet sich eine Linse größerer von der mit kleinerer Brechkraft? Welcher qualitative Zusammenhang besteht zwischen Brennweite und Brechkraft?
  - Bestimme die Brennweite einer Sammel- und Zerstreuungslinse, indem Du paralleles Licht (Beam) verwendest und den Abstand zwischen Linsenmitte und Brenn- bzw. Zerstreuungspunkt bestimmst. Vergleiche mit den Datenangaben an der Linse.

### 3. Ausgezeichnete Lichtstrahlen

- a) Erzeuge als Lichtquelle ein „Pfeilobjekt“ und positioniere eine Linse auf der optischen Achse. Die drei von der Pfeilspitze ausgehende Strahlen heißen Parallelstrahl, Brennpunktstrahl und Mittelpunktstrahl:
- Welcher Strahl hat welche Bezeichnung? Nach welchem Kriterium werden die drei Strahlen bezeichnet?
- b) Lösche das Pfeilobjekt und verwende als Lichtquelle „Source“:
- Stelle das Lichtbündel der Source so ein, dass der Strahl mit dem weißen Punkt einmal Parallel-, einmal Brennpunkt- und einmal Mittelpunktstrahl ist. Formuliere ein zusammenfassendes Ergebnis zum Verlauf ausgezeichnete Lichtstrahlen.
- c) Wähle als Lichtquelle „Objekt“:
- Wieviele der ausgezeichneten Lichtstrahlen braucht man zur Konstruktion des Bildes der Pfeilspitze?
  - Was weiß man über den Verlauf der anderen von der Pfeilspitze ausgehenden und nicht ausgezeichneten Lichtstrahlen?
  - Weshalb braucht man für die Vorhersage des Pfeilbildes nur den Bildpunkt der Pfeilspitze?

### 4. Akkomodation des normalsichtigen Auges

- a) Konstruiere ein Auge mit einer Sammellinse bei  $x = 5,0$  und einer geschlossenen Blende ( $d = 0$ ) als Netzhaut bei  $x = 6,0$ . Ein Gegenstand befindet sich einmal bei  $x = 0,1$  und dann bei  $x = 1,5$ :
- Welche Größe muss in welcher Weise angepasst werden, um bei konstantem Abstand der Netzhaut von der Linse den Gegenstand in beiden Entfernungen scharf zu sehen?
- b) Der Vorgang der automatischen Anpassung der Augenlinse an unterschiedliche Gegenstandsweiten heißt Akkomodation:
- Untersuche, ob die Linse zwischen  $x = 0,1$  und  $x = 0,6$  oder zwischen  $x = 3,5$  und  $x = 4,0$  stärker akkomodieren muss.

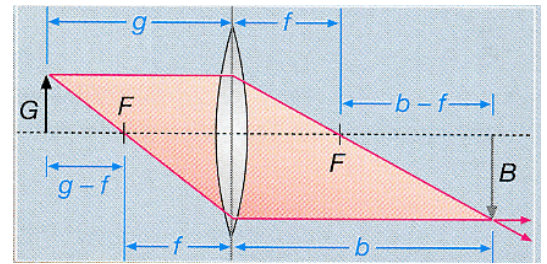
### 5. Korrektur von Kurz- und Weitsichtigkeit

- a) Verwende wieder das Augenmodell aus 4.. Erstelle ein Modell der Abbildung des ins Unendliche blickenden Auges eines Menschen. Leider erkrankt das Auge an Kurzsichtigkeit. Die Netzhaut liegt um  $0,4$  weiter rechts:
- Warum sieht unser Patient nun nicht mehr scharf?
  - Finde heraus, welche Brille er bei  $x = 4,5$  braucht, um wieder scharf zu sehen.
- b) Stelle das Modell des gesunden Auges wieder her. Bilde einen Gegenstand bei  $x = 1,5$  scharf auf die Netzhaut ab. Leider erkrankt das Auge wieder, diesmal an Weitsichtigkeit. Seine Netzhaut liegt um  $0,4$  weiter nach links:
- Warum sieht unser Patient nun nicht mehr scharf?
  - Finde heraus, welche Brille er bei  $x = 4,5$  braucht, um wieder scharf zu sehen.

## II. Aufgaben für Oberstufe

### 1. Linsengleichung und Abbildungsmaßstab

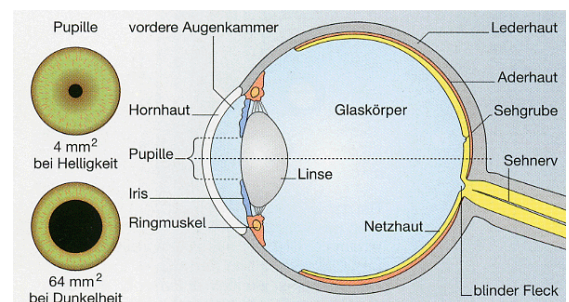
In der Abbildung sind Gegenstandsweite  $g$ , Bildweite  $b$ , Brennweite  $f$ , Gegenstandsgröße  $G$  und Bildgröße  $B$  eingetragen:



- Nimm in der Simulation den Zusammenhang  $b(g)$  für  $f = 1$  sowie  $g > f$  auf (Linsenposition z. B.  $x = 2,7$ ) und trage die Daten in ein Koordinatensystem ein. Wie verhält sich  $b$  für  $g \rightarrow f$  und  $g \rightarrow \infty$ ? Um welche Art von Funktion könnte es sich handeln? Gib eine passende Funktionsvorschrift an.
- Kontrolliere das Ergebnis aus 1. indem du anhand geometrischer Beziehungen den Zusammenhang zwischen  $b$ ,  $g$  und  $f$  (Linsengleichung) aus der Abbildung ableitest.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen  $B$ ,  $G$ ,  $b$ , und  $g$  (Gleichung für Abbildungsmaßstab  $A = B/G$ )?
- Gib  $A_f(g)$  an. In welchem Intervall schwankt  $A_f(g)$  für  $2f < g < \infty$ ?

### 2. Arbeiten mit einem Augenmodell

Ein einfaches Augenmodell besteht aus einer dünnen in ihrer Brechkraft  $D = 1/f$  ( $[D] = 1/m = 1 \text{ dpt}$ ) veränderbaren Linse (Hornhaut und Linse) und einem Schirm (Netzhaut) im festen Abstand von etwa  $d = 18 \text{ mm}$  von der Linsenmitte. Die minimale Gesamtbrechkraft  $D_{\min}$  eines Auges soll  $55,55 \text{ dpt}$  (davon etwa  $42 \text{ dpt}$  durch die Hornhaut) und die stark altersabhängige maximale Gesamtbrechkraft  $D_{\max}$   $70 \text{ dpt}$  betragen.



- Baue mit der Simulation aus Linse und Blende mit Öffnung Null ein Augenmodell. Simuliere die Anpassung des Auges an die Gegenstandsweite durch Veränderung der Linsenbrechkraft (Akkommodation). Wann muß die Brechkraft (Brennweite und Linsenkrümmung) groß bzw. klein sein?
- Ermittle die minimale und maximale Brennweite. Mit welchem Wert stimmt  $f_{\min}$  überein und warum?
- Leite eine Formel für  $f(g)$  her. Was ist  $\lim_{g \rightarrow \infty} f(g)$ ? Welche Brennweite stellt sich für  $g = 50 \text{ cm}$  ein? Für welchen Gegenstandsweitenbereich kann das Modellauge akkomodieren?
- Für welche Gegenstandsweiten muß die Akkomodationsleistung unseres Auges, das heißt die Brennweitenveränderung  $\Delta f$  mit der Gegenstandsweitenveränderung  $\Delta g$ , groß sein? Beantworte die Frage erst mit der Simulation, dann auf mathematischem Wege und vergleiche.

### 3. Korrektur von Kurz- und Weitsichtigkeit durch Kontaktlinsen

Zwei im Abstand  $a$  aufgestellte dünne Linsen (Linsensystem) mit den Brechkraften  $D_1$  und  $D_2$  verhalten sich so wie eine dünne Linse der Gesamtbrechkraft  $D_{\text{Ges}} = D_1 + D_2 - aD_1D_2$ . Für Kontaktlinsen, die unmittelbar auf die Hornhaut gesetzt werden ist  $a$  sehr klein und der Term  $aD_1D_2$  klein gegenüber den anderen Summanden,

so dass er vernachlässigt werden kann und  $D_{\text{Ges}} = D_1 + D_2$  beträgt. Für Sammellinsen ist  $D > 0$ , für Zerstreuungslinsen  $D < 0$ :

- a) Wie lässt sich ein aus einer Sammellinse ein Linsensystem mit größerer, kleinerer und der Brechkraft Null erzeugen?
- b) Probiere die Lösungen unter b) aus. Überprüfe an zwei konkreten Beispielen mit der Simulation die Gesetzmäßigkeit (Linsen lassen sich für  $d = 0$  übereinanderschieben)
- c) Ein Patient mit den angegebenen Augendaten leidet an Kurzsichtigkeit, weil der Abstand  $d$  seiner Netzhaut von der Linse um  $\Delta d = 6$  mm zu groß ist (zu großer Wert, aber für Simulation notwendig): Begründe, wann der Patient scharf bzw. unscharf sieht. Braucht er zur Korrektur seines Augenfehlers eine Zerstreuungs- oder Sammellinse? Berechne deren Brechkraft und Brennweite. Überprüfe Deine Lösung mit der Simulation (2 mm entsprechen 0,1 in der Simulation).
- d) Ein Patient leidet an Weitsichtigkeit, weil der Abstand  $d$  seiner Netzhaut von der Linse um  $\Delta d = 2$  mm zu klein ist: Begründe, wann der Patient scharf bzw. unscharf sieht. Braucht er zur Korrektur seines Augenfehlers eine Zerstreuungs- oder Sammellinse? Berechne deren Brechkraft und Brennweite.

# Lösungen

## I. Mittelstufe

### 1. Abbilden mit einer Sammellinse

- a) Die Linse bricht das Licht (Richtungsänderung) um so stärker, je weiter der Lichtstrahl von der optischen Achse entfernt ist. Zur Abbildung wird nur der auf die Linsenoberfläche treffende Lichtanteil verwendet.
- b) Vom Gegenstandspunkt geht divergentes Licht aus. Die Linse wandelt das divergente in konvergentes, im Bildpunkt zusammenlaufendes Licht um. Hinter dem Bildpunkt ist das Licht wieder divergent.
- c) Punkte der Gegenstandsebene werden in Punkte der Bildebene abgebildet.
- d) Für  $0 < x < 2,5$  verkleinert, für  $x = 2,5$  gleich groß, für  $2,5 < x < 3$  vergrößert, für  $3 < x < 3,5$  kein Bild
- e) Das Bild ist reell, seitenverkehrt, auf dem Kopf und verkleinert. Auf dem Kopf stehende und seitenrichtige reelle Bilder gibt es nicht, da ein Gegenstandspunkt außerhalb der optischen Achse immer auf die andere Seite der optischen Achse abgebildet wird.
- f) Je kleiner die Gegenstandsweite, desto größer die Bildweite und Bildgröße. Die Gegenstandsweite kann links von  $x = 3$ , die Bildweite rechts von 4 liegen.

### 2. Brennweite und Brechkraft

- a) Die Sammellinse wird flacher und weniger gekrümmt. Die Linse bricht das Licht nicht mehr so stark, der angezeigte Wert von  $f$  wird größer. Bildweite und Bildgröße werden größer. Bei der Zerstreuungslinse entsteht kein Bild mehr.
- b) Aus der Koordinatendifferenz läßt sich die Brennweite ermitteln, die mit der Brennweitenangabe an der Linse übereinstimmt.  
Je größer die Linsenkrümmung ist, desto kleiner ist die Brennweite.  
Keine Krümmung (Planparallele Platte), unendliche Brennweite.  
Die mit größerer Brechkraft lenken Lichtstrahlen stärker ab. Je kleiner die Brennweite desto größer die Brechkraft.

### 3. Ausgezeichnete Lichtstrahlen

- a) Oberer: Parallelstrahl, Mittlerer: Mittelpunktstrahl, Unterer: Brennpunktstrahl. Sie werden nach ihrem Verlauf vor der Linse bezeichnet.
- b) Aus Parallelstrahlen werden Brennpunktstrahlen, Mittelpunktstrahlen gehen ungebrochen durch die Linsenmitte, aus Brennpunktstrahlen werden Parallelstrahlen.
- c) Man braucht zwei Lichtstrahlen, um den Bildpunkt durch einen Schnitt von Geraden zu ermitteln. Alle anderen vom Gegenstandspunkt ausgehenden Lichtstrahlen laufen hinter der Linse ebenfalls im Bildpunkt zusammen, da eine Linse einen Gegenstandspunkt in einen Bildpunkt abbildet.
- d) Alle Gegenstandspunkte der Gegenstandsebene werden in eine gemeinsame Bildebene abgebildet. Der Mittelpunktstrahl legt danach die Orte aller anderen Bildpunkte fest.

#### 4. Akkomodation des normalsichtigen Auges

- a) Die Brennweite muß bei größerer Gegenstandsweite größer bzw. die Brechkraft kleiner sein.
- b) Für  $x = 0,1$  ist  $f = 0,84$  und für  $x = 1,1$  ist  $f = 0,80$ ; Für  $x = 3,5$  ist  $f = 0,6$  und für  $x = 4,0$  ist  $f = 0,51$ . Die Linse muß in der Nähe stärker akkomodieren.

#### 5. Korrektur von Kurz- und Weitsichtigkeit

- a) Der Bildpunkt liegt nicht mehr auf der Netzhaut.  
Er benötigt eine Zerstreuungslinse mit  $f = -3,05$  oder  $D = -0,33$ .
- b) Der Bildpunkt liegt nicht mehr auf der Netzhaut.  
Er benötigt eine Sammellinse mit  $f = 0,81$  oder  $D = 1,23$ .

## II. Oberstufe

### 1. Linsengleichung und Abbildungsmaßstab

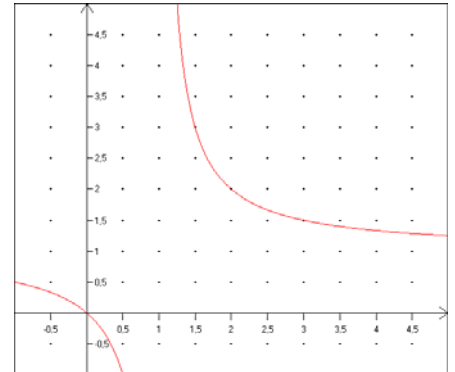
a) Tabelle mit den Daten:

g	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
b	3,50	3,00	2,66	2,42	2,25	2,11	2,00	1,90	1,83	1,76	1,71	1,66	1,62

Für  $g \rightarrow f$  geht  $b \rightarrow \infty$ , für  $g \rightarrow \infty$  geht  $b \rightarrow f$   
 Um eine gebrochen-rationale Funktion mit der Asymptote  $b = f$  und einem Pol bei  $b = f$ . Das funktioniert mit der Funktion  $b(g) = c \frac{fg}{g-f}$  oder  $b(g) = c \frac{g^2}{g-f}$  oder

$b(g) = c \frac{f^2}{g-f}$  Der Nenner begründet sich mit dem Pol, im

Zähler muß die Einheit  $m^2$  stehen. Ein Vergleich mit den Daten ergibt  $c = 1$  in der ersten Formel.



b) Mit Hilfe der Strahlensätze oder trigonometrischer Beziehungen und Umformungen erhält man aus der Zeichnung die Linsengleichung:

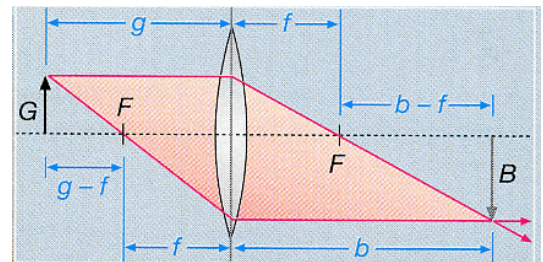
$$\frac{G}{B} = \frac{f}{b-f} = \frac{g-f}{f} \Leftrightarrow f^2 = (g-f)(b-f)$$

$$0 = gb - fb - fg \Leftrightarrow gb = fb + fg$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

c) Mit Hilfe eines gedachten Mittelpunktstrahls ist

$$\frac{B}{G} = A = \frac{b}{g}$$



d) Die Bildweite  $b$  in A wird durch  $b$  aus der Linsengleichung ersetzt und mit  $x = g/f > 1$

$$\text{erhält man: } b = \frac{fg}{g-f} \Rightarrow A_r(g) = \frac{fg}{g(g-f)} = \frac{f}{g-f} = \frac{1}{x-1}$$

$x \rightarrow \infty$ :  $A \rightarrow 0$ ;  $x = 2$ :  $A = 1$ ;  $x \rightarrow 1$ :  $A \rightarrow \infty$ . Also erhält man für  $x \in ]\infty, 2[$  ein verkleinertes Bild, für  $x = 2$  ein gleich großes Bild und für  $x \in ]2, 1[$  ein vergrößertes Bild.

### 2. Arbeiten mit einem Augenmodell

a) Große Brechkraft, kleine Brennweite, große Linsenkrümmung bzw. kleine Brechkraft, große Brennweite, kleine Linsenkrümmung.

$$b) f_{\min} = \frac{1}{D_{\max}} = 1,4 \text{ cm}; f_{\max} = \frac{1}{D_{\min}} = 1,8 \text{ cm}$$

$f_{\max}$  stimmt mit  $d$  überein, da beim Blick ins Unendliche das Bild auf der Netzhaut liegen muß.

$$c) \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow f(g) = \frac{gd}{g+d}, \quad \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{d}{1 + \frac{d}{g}} = d$$

$$f(50 \text{ cm}) = 1,73 \text{ cm}$$



$$g_{\max} = \infty, g_{\min} = \frac{df_{\min}}{d - f_{\min}} = 6,3 \text{ cm (Nahpunkt)}$$

- d) Die Akkomodationsleistung ergibt sich aus der Steigung des  $f(g)$ -Graphen, also der Ableitung:

$$f'(g) = \frac{d(g+d) - 1gd}{(g+d)^2} = \frac{d^2}{(g+d)^2}$$

Die Akkomodationsleistung muss mit abnehmendem  $g$  immer größer werden, für  $g \rightarrow \infty$  geht sie gegen 0. Im Unendlichen ist sie 0, am Nahpunkt beträgt sie 0,5 mm/mm. Experimentell erhält man 0,4 mm/mm.

### 3. Korrektur von Kurz- und Weitsichtigkeit durch Kontaktlinsen

- a) Weitere Sammellinse, Zerstreuungslinse, Zerstreuungslinse mit gleich großer Brechkraft.

- b) Man verwendet als Lichtquelle ein paralleles Strahlenbündel, stellt die beiden Brennweiten der Linsen ein, bringt ihre Mittelebenen zu sammen. An den veränderten Brennweiten erkennt man die veränderten Brechkräfte. Für  $D_{\text{Ges}} = 0$  geht läuft das Strahlenbündel ungebrochen durch das Linsensystem.

Formel:  $f_1 = 1, f_2 = 1,5, D_1 = 1, D_2 = 2/3, D_{\text{Ges}} = 1,666$

Simulation:  $f_{\text{Ges}} = 0,61, D_{\text{Ges}} = 1,64$ .

- c) Die Brechkraft des Auges ist beim Blick in die Ferne ist zu groß, bzw. kann durch Akkomodation nicht weiter verringert werden. Der Patient sieht beim Blick in die Ferne unscharf, weil der Bildpunkt vor der Netzhaut liegt. Bei kleineren Gegenstandsweiten mit divergentem Licht vom Gegenstand wird die zuvor zu große Brechkraft nun für die Richtungsänderung der Strahlen benötigt. Er benötigt zur Verringerung der Brechkraft beim Blick in die Ferne eine Zerstreuungslinse.

Berechnung: Mit Brille muss bei parallelem Lichteinfall (Gegenstand im unendlichen, Blick in die Ferne), die Brechkraft  $D_{\text{Ges}}$  gerade so groß sein, dass das Bild auf die

Netzhaut fällt: Also muss gelten  $D_{\text{Ges}} = D_{\text{Auge}} + D_{\text{Brille}} = \frac{1}{d + \Delta d}$ . Einsetzen der Daten liefert

$D_{\text{Ges}} = 41,6 \text{ dpt}$  und  $D_{\text{Brille}} = -13,3 \text{ dpt}$  oder  $f_{\text{Brille}} = -7,5 \text{ cm}$ .

Die Simulation liefert  $f_{\text{Brille}} = 7,24$  (-3,62 abgelesen).

- d) Die Brechkraft des Auges ist beim Blick in die Nähe ist zu klein, bzw. kann durch Akkomodation nicht weiter erhöht werden. Der Patient sieht beim Blick in die Nähe unscharf, weil der Bildpunkt hinter der Netzhaut liegt. Bei größeren Gegenstandsweiten mit mehr parallelem Licht vom Gegenstand reicht die zuvor zu kleine Brechkraft nun für die Richtungsänderung der Strahlen aus. Er benötigt zur Erhöhung der Brechkraft beim Blick in die Nähe eine Sammellinse.